

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ КЕЛЬВИН-ФОЙГТ ЖҮЙЕСІ ҮШІН КЕРІ ЕСЕП. ШЕШІМНІҢ АСИМПТОТИКАЛЫҚ ҚАСИЕТІ

Шәкір Айдос Ғанижанұлы

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

математика кафедрасының аға оқытушысы, PhD

17 қазан 2025
Алматы, Қазақстан



Дәрістің мақсаты – интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің әлсіз шешімінің асимптотикалық қасиеттерін зерттеу

Негізгі сұрақтар:

- 1 Сызықты интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің $K(t) \neq 0$ жағдайда экспоненциалды кемуі
- 2 Сызықты интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін қойылған кері есептің $K(t) = 0$ жағдайда экспоненциалды кемуі



Бұл дәрісте сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтың қозғалысын сипаттайтын сызықты интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесі үшін коэффициентті кері есеп қарастырылды. Аталмыш кері есептің жалпылама әлсіз шешімінің экспоненциалды кемуі қасиеті зерттелінді. Қарастырылып отырған кері есептің жалпылама әлсіз шешімінің экспоненциалды кемуі туралы интегралдық мүше болғанда ($K(t) \neq 0$) 1.2-теорема, болмағанда ($K(t) = 0$) 1.1-теорема алынды. Теоремалар математикалық қатаң тілде дәлелденді. Алынған нәтижелер жоба орындаушыларының [1] жұмысында жарияланған.

Айталық, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, шектелген облыс, ал $\partial\Omega$ оның тегіс шекарасы болсын. Сондай-ақ, $Q_T = \Omega \times (0, T)$ арқылы цилиндрлік облысты, ал оның $\Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T]$ арқылы бүйір бетін белгілейік, мұндағы T — берілген оң ақырлы уақыт. Біз $(\mathbf{u}(x, t), p(x, t), f(t))$ функцияларын анықтауға арналған, сығылмайтын тұтқыр серпімді сұйықтықтардың ағынын сипаттайтын



Абылкаиров У., Кенжебай Х., Шәкір А.

Жады мүшесі бар Кельфин-Фойгт жүйесінің шешімінің экспоненциалды кемуі.
Абай атындағы ҚазҰПУ Хабаршысы. Физика-математика ғылымдары сериясы.
90, 2 (2025), 36–45. DOI: <https://doi.org/10.51889/2959-5894.2025.90.2.003>



$$\mathbf{u}_t - \kappa \Delta \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} - \int_0^t K(t-s) \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, s) ds + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = f(t) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \quad \text{in } Q_T, \quad (1)$$

жады мүшесі бар Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесін,

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{in } Q_T, \quad (2)$$

сығылмайтын сұйық теңдеуін,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{in } \Omega, \quad (3)$$

бастапқы шартты,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{on } \Gamma_T, \quad (4)$$

шекаралық шартты және

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = h(t), \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

қосымша интегралдық шартын қанағаттандыратын кері есепті қарастырайық, мұндағы $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1, u_2, \dots, u_d)$ сұйықтықтың жылдамдығының өрісі, $p(\mathbf{x}, t)$ сұйықтықтың қысымы, ал ν және $\kappa > 0$ сандары, сәйкесінше, сұйықтықтың кинематикалық тұтқырлығы мен релаксация коэффициенттері болып табылады. Сондай-ақ, кері есепте $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) := f(t) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ сыртқы күштердің әсерін сипаттайды, мұндағы $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) := \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) - \kappa \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ және ондағы $f(t)$ интенсивтілігі белгісіз функция, ал $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, $h(t)$, $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ және $K(t)$ функциялары берілген белгілілер.



Definition

(1)-(5) кері есебінің әлсіз шешімі деп

- 1 $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{H}^1) \cap \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^1)$, $\mathbf{u}_t \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^1)$, $f(t) \in L^2[0, T]$;
- 2 Ω облысында $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ бастапқы шартты;
- 3 барлық $t \in [0, T]$ аралығында (5) қосымша шартты;
- 4 кез келген $\varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ тест функциясы және барлық $t \in (0, T)$ мәндері үшін төмендегі интегралдық тепе-теңдікті

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left((\mathbf{u}, \varphi)_{2, \Omega} + \kappa \mathbf{a}(\mathbf{u}, \varphi) \right) + \nu \mathbf{a}(\mathbf{u}, \varphi) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \varphi, \mathbf{u} + \\ \int_0^t K(t-s) \mathbf{a}(\mathbf{u}, \varphi) ds = f(t) (\omega, \varphi)_{2, \Omega}, \end{aligned} \quad (6)$$

қанағаттандыратын $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), f(t))$ функцияларын жұбын айтады, мұндағы $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \varphi) := (\nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi)_{2, \Omega}$.



Айталық, (1)-(5) кері есебінің бастапқы берілгенді келесі шарттарды қанағаттандырсын

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \in \mathbf{H}^1; \quad (7)$$

$$\omega(\mathbf{x}) \in \mathbf{H}^1, \quad h(t) \in W_2^1([0, T]); \quad (8)$$

Енді келесі энергетикалық функцияны енгізейік

$$\Psi(t) := \|\mathbf{u}(t)\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}^1}^2.$$



Theorem ($K(t) \neq 0$ жағдай)

Айталық, (7), (8) шарттар орындалсын және m_0, α оң сандары табылып келесі шарттарды қанағаттандырсын

$$|K(t)| \leq m_0 e^{-\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

және

$$\|K\|_{L_1[0,t]} = \int_0^t |K(\tau)| d\tau \leq \frac{m_0}{\alpha}, \quad \text{and} \quad \|K\|_{L_2[0,t]} = \left(\int_0^t |K(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{m_0}{\sqrt{2\alpha}}. \quad (15)$$

Онда $0 < \gamma < \alpha$ мәніне сәйкес M_2 ақырлы оң саны табылып

$$\Psi(t) \leq M_2 e^{-\gamma t},$$

бағалау орындалады, яғни $\Psi(t)$ функциясы $t \rightarrow \infty$ кезде экспоненциалды кемиді.



Ең алдымен $K(t) \neq 0$ жағдайда, (1)–(5) есебінің әлсіз шешімінің экспоненциалды кемуін көрсетейік. Олай болса, (1) өрнекті $\mathbf{v}$ функциясына көбейтіп, x айнымалысы бойынша Ω облыста интегралдап және бөліктеп интегралдау өрнегінің көмегімен

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 + \varkappa \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2) + \nu \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 = \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{v}(s), \nabla \mathbf{v}(t))_{2,\Omega} ds + S_1(\mathbf{v}, \mathbf{v}_t) = \sum_{i=1}^2 J_i \quad (9)$$

энергетикалық теңдігін алуға болады, мұндағы

$$S_1(\mathbf{v}, t) := \frac{1}{k_0} \left(h'(t) + \nu (\nabla \mathbf{v}, \nabla \omega)_{2,\Omega} + \int_0^t K(t-s) (\nabla \mathbf{v}, \nabla \omega)_{2,\Omega} ds \right);$$

$$k_0 := \|\omega\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla \omega\|_{2,\Omega}^2$$

Енді (9) өрнектің оң жағын бағалайық

$$|J_1| \leq \frac{\varepsilon_0 \nu}{4} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1}{\varepsilon_0 \nu} \left(\int_0^t |K(t-s)| \|\mathbf{v}(s)\|_{\mathbf{H}} ds \right)^2 \quad (10)$$

және



$$|J_2| \leq \frac{|h(t)||h'(t)|}{k_0} + \frac{\varepsilon_0 \nu}{4} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{\nu}{\varepsilon_0 k_0^2} |h(t)|^2 \|\omega\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1 k_0^2} |h(t)|^2 \|\omega\|_{\mathbf{H}}^2 + \quad (11)$$

$$\frac{\varepsilon_1}{2} \left(\int_0^t |K(t-s)| \|\mathbf{v}(s)\|_{\mathbf{H}} ds \right)^2$$

Соңғы (10), (11) бағалауларды (9) өрнекке қойсақ, онда

$$\frac{d}{dt} (\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 + \varkappa \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2) + 2(\nu - \varepsilon_0) \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 \leq \left(\frac{2}{\varepsilon_0 \nu} + \varepsilon_1 \right) \left(\int_0^t |K(t-s)| \|\mathbf{v}(s)\|_{\mathbf{H}} ds \right)^2 + C_1(t) \quad (12)$$

мұндағы

$$C_1(t) := \frac{|h(t)||h'(t)|}{k_0} + \frac{\nu}{\varepsilon_0 k_0^2} |h(t)|^2 \|\omega\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1 k_0^2} |h(t)|^2 \|\omega\|_{\mathbf{H}}^2.$$

Соңғы өрнекті s бойынша 0-ден t -ке дейін интегралдағанда,

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 + \varkappa \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 + 2(\nu - \varepsilon_0) \int_0^t \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 ds \leq \left(\frac{2}{\varepsilon_0 \nu} + \varepsilon_1 \right) \int_0^t \left(\int_0^s |K(s-\tau)| \|\mathbf{v}(\tau)\|_{\mathbf{H}} d\tau \right)^2 ds + C_2 \quad (13)$$



мұндағы $C_2 = \int_0^t C_1(s) ds + \|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{H}}^2$. Сонымен қатар, (12) өрнектегі интегралдық мүше үшін

$$\left(\int_0^t |K(t-\tau)| \|\mathbf{v}(\tau)\|_{\mathbf{H}} d\tau \right)^2 \leq \int_0^t |K(t-\tau)| d\tau \int_0^t |K(t-\tau)| \|\mathbf{v}(\tau)\|_{\mathbf{H}}^2 d\tau = \quad (14)$$

$$\|K\|_{L^1([0,T])} \int_0^t |K(t-\tau)| \|\mathbf{v}(\tau)\|_{\mathbf{H}}^2 d\tau$$

бағалауын қолдануға болады. Сондай-ақ, m_0, α оң сандары табылып, $|K(t)| \leq m_0 e^{-\alpha t}$, $t \in R^+$ болса, онда төмендегі бағалауды алуға болады

$$y_1(t) = \|K\|_{L^1([0,T])} = \int_0^t |K(\tau)| d\tau \leq \frac{m_0}{\alpha}, \quad y_2(t) = \|K\|_{L^2([0,T])} = \left(\int_0^t |K(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \leq \frac{m_0}{\sqrt{2\alpha}}. \quad (15)$$

Жоғарыдағы (15) өрнектің көмегімен келесі теңсіздік тұжырымдалады:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^s |K(s-\tau)| \|\mathbf{v}(\tau)\|_{\mathbf{H}}^2 d\tau ds &\leq \int_0^t \int_0^t |K(s-\tau)| \|\mathbf{v}(\tau)\|_{\mathbf{H}}^2 d\tau ds = \\ \int_0^t \|\mathbf{v}(\tau)\|_{\mathbf{H}}^2 \int_0^t |K(s-\tau)| ds d\tau &\leq \|K\|_{L^1([0,T])} \int_0^t \|\mathbf{v}(\tau)\|_{\mathbf{H}}^2 d\tau. \end{aligned} \quad (16)$$



Осылайша (14)–(16) өрнектерді (13) өрнекке ескерсек, онда бағалау алынады

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 + C_0 \int_0^t \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 ds \leq M_1 \quad (17)$$

мұндағы $C_0 := 2(\nu - \varepsilon_0) - \left(\frac{2}{\varepsilon_0\nu} + \varepsilon_1\right) \left(\frac{m_0}{\alpha}\right)^2 > 0$ және M_1 есептің берілгендерінен тәуелді оң сан.

Енді $0 < \gamma < \alpha$ саны үшін $\mathbf{v}(t) = e^{-\gamma t} \mathbf{u}(t)$ деп алсақ, және $\mathbf{v}_t = \mathbf{u}_t e^{-\gamma t} - \gamma \mathbf{u} e^{-\gamma t}$ екенін ескерсек, онда (1) өрнек мына түрде жазылады:

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}_t e^{-\gamma t} - \gamma \mathbf{u} e^{-\gamma t} - \Delta (\mathbf{u}_t e^{-\gamma t} - \gamma \mathbf{u} e^{-\gamma t}) - \nu \Delta \mathbf{u} e^{-\gamma t} - \int_0^t K(t-s) \mathbf{u} e^{-\gamma s} ds = \\ & \frac{\sigma(x)}{k_0} \left[h'(t) + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} e^{-\gamma t} \nabla \omega dx + \int_0^t K(t-s) \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} e^{-\gamma s} \nabla \omega dx ds \right]. \end{aligned} \quad (18)$$



Соңғы өрнектің екі жағына $e^{\gamma t}$ көбейтсек, онда келесі өрнек тұжырымдалады

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t - \gamma \mathbf{u} - \Delta(\mathbf{u}_t - \gamma \mathbf{u}) - \nu \Delta \mathbf{u} - \int_0^t K(t-s) \mathbf{u} e^{\gamma(t-s)} ds = \\ \frac{\sigma(x)}{k_0} \left[h'(t) e^{\gamma t} + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \nabla \omega dx + \int_0^t K(t-s) \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} e^{\gamma(t-s)} \nabla \omega dx ds \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Мұнан соң жоғарыдағы өрнекті $\mathbf{u}$ функциясына көбейтіп, x айнымалысы бойынша Ω облыста интегралдап, бөліктеп интегралдасақ, онда келесі теңдік шығады

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2 + \kappa \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}}^2) - \gamma \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2 - \gamma \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}}^2 + \nu \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}}^2 = \int_0^t K_{\gamma}(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \mathbf{u}(t))_{2,\Omega} ds + \\ \frac{h(t)}{k_0} \left(h'(t) + \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \omega)_{2,\Omega} + \int_0^t K_{\gamma}(t-s) (\nabla \mathbf{u}, \nabla \omega)_{2,\Omega} ds \right) \end{aligned} \quad (20)$$



мұндағы $K_\gamma(t) := K(t)e^{\gamma t}$. Егер $\gamma < \alpha$ жағдайда төмендегі бағалауларды алуға болады

$$\begin{aligned}\|K_\gamma(t)\|_{L^1([0,T])} &= \int_0^t K(s)e^{\gamma s} ds \leq m \int_0^t e^{-(\alpha-\gamma)s} ds \leq \frac{m}{\alpha-\gamma}; \\ \|K_\gamma(t)\|_{L^2([0,T])} &= \left(\int_0^t |K(s)e^{\gamma s}|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{m}{\sqrt{2(\alpha-\gamma)}}\end{aligned}\tag{21}$$

Сонымен қатар, Фридрихс теңсіздігінен

$$-\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2 \geq -C\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}}^2\tag{22}$$

теңсіздігін қорытуға болады. Соңғы бағалаудан

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2 + \varkappa \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}}^2) + (\nu - \gamma - \gamma C) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}}^2 &\leq \int_0^t K_\gamma(t-s) (\nabla \mathbf{u}(s), \nabla \mathbf{u}(t))_{2,\Omega} ds + \\ \frac{h(t)}{k_0} \left(h'(t) + \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \omega)_{2,\Omega} + \int_0^t K_\gamma(t-s) (\nabla \mathbf{u}, \nabla \omega)_{2,\Omega} ds \right)\end{aligned}\tag{23}$$



Осылайша (10), (21), (22), (23) өрнектерден келесі нәтижені алуға болады

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{v}}^2 \leq M_2, \quad (24)$$

мұндағы M_2 есептің берілгендерінен тәуелді оң сан және $\mathbf{v} = \mathbf{u}e^{-\gamma t}$ өрнегін ескеріп төмендегі нәтижені тұжырымдауға болады

$$\Psi(t) = |\psi(t)|_{L^2} \leq M_2 e^{-\gamma t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (25)$$



Theorem ($K(t) = 0$ жағдай)

Айталық, $e(t)$ және $e'(t)$ функциялары уақыт бойынша монотонды кемімелі функциялар болсын және

$$A \int_0^t (|e(s)|^2 + |e'(s)|^2) e^{\lambda s} ds + \Psi(0) < +\infty, \quad (26)$$

шарты орындасын, мұндағы

$$A := \frac{(\varkappa + \nu) \|\omega\|_{\mathbf{H}^1}^2 + 3l_0}{2l_0^2} \text{ және } \Psi(0) := \|\mathbf{u}_0\|_{2,\Omega}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{H}^1}^2,$$

$$\lambda := \frac{\nu}{C(\Omega) + \varkappa + \nu}.$$

Онда M_1 ақырлы оң саны табылып

$$\Psi(t) \leq M_1 e^{-\lambda t},$$

бағалау орындалады, яғни $\Psi(t)$ функциясы $t \rightarrow \infty$ кезде экспоненциалды кемиді.

Енді (1)-(4) кері есебінің әлсіз шешімінің $K(t) = 0$ және $\sigma(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x})$ болғанда экспоненциалды кемуін зерттейік. (1) теңдеулер жүйесін $\mathbf{v}$ және $\mathbf{v}_t$ функцияларына көбейтіп, x айнымалысы бойынша Ω облыста интегралдайық. Мұнан кейін, бөліктеп интегралдау өрнегін қолданып, келесі энергетикалық теңдіктер шығады

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 + \varkappa \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2) + \nu \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 = S_2(\mathbf{v}, t)h(t) \quad (27)$$

$$\frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{v}_t\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{v}_t\|_{\mathbf{H}}^2 = S_2(\mathbf{v}, t)h'(t) \quad (28)$$

мұндағы

$$S_2(\mathbf{v}, t) := \frac{1}{l_0} \left(h'(t) + (\nabla \mathbf{v}_t, \nabla \omega)_{2, \Omega} + \nu (\nabla \mathbf{v}, \nabla \omega)_{2, \Omega} \right); \quad l_0 := \|\omega\|_{2, \Omega}^2.$$

Осылайша (27) және (28) өрнектерден келесі теңдікті тұжырымдауға болады

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 + (\nu + \varkappa) \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2) + \nu \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{v}_t\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{v}_t\|_{\mathbf{H}}^2 = S_2(\mathbf{v}, t)h(t) + S_2(\mathbf{v}, t)h'(t) \quad (29)$$



Соңғы өрнектің оң жағындағы қосылғыштарды бағалайық

$$|S_2(\mathbf{v}, t)h(t)| \leq \frac{|(h(t))^2 + |(h'(t))^2|}{2l_0^2} + \frac{1}{4}\|\mathbf{v}_t\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1+\nu}{l_0^2}|(h(t))^2|\|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{\nu}{4}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2, \quad (30)$$

$$|S_2(\mathbf{v}, t)h'(t)| \leq \frac{|(h'(t))^2|}{l_0} + \frac{1}{4}\|\mathbf{v}_t\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1+\nu}{l_0^2}|(h'(t))^2|\|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{\nu}{4}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 \quad (31)$$

Мұнан кейін (30) және (31) бағалауларды (29) теңдіктің оң жағына қойғанда

$$\Psi'(t) + \nu\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{v}_t\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{v}_t\|_{\mathbf{H}}^2 \leq A(|(h(t))^2 + |(h'(t))^2|) \quad (32)$$

теңсіздігі тұжырымдалады, мұндағы

$$A := \frac{(\varkappa + \nu)\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}^1}^2 + 3l_0}{2l_0^2}.$$

Пуанкаре теңсіздігін пайдаланып келесі бағалауды да алуға болады

$$\nu\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2 \geq \frac{\nu}{C(\Omega) + \nu + \varkappa} (\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 + \varkappa\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}^2) = \mu\Psi(t), \quad (33)$$



мұндағы

$$\mu := \frac{\nu}{C(\Omega) + \nu + \varkappa} \quad (34)$$

Енді (34) бағалауды (33) теңсіздікке ескерсек әрі алынған нәтижені $e^{\mu t}$ —ға көбейтсек, онда

$$e^{\mu t} \Psi'(t) + \mu e^{\mu t} \Psi(t) \leq A (|h(t)|^2 + |h'(t)|^2) e^{\mu t}. \quad (35)$$

Соңғы өрнекті s айнымалысы бойынша 0—ден t —ға дейін интегралдағанда, келесі өрнек қорытылады

$$\Psi(t) \leq e^{-\mu t} \left(A \int_0^t (|h(s)|^2 + |h'(s)|^2) e^{\mu s} ds + \Psi(0) \right). \quad (36)$$

Онда (36) теңсіздікте t шексіздікке ұмтылғанда ($t \rightarrow \infty$) $\Psi(t)$ функциясы 0—ге ұмтылады ($\Psi(t) \rightarrow 0$).



НАЗАРЛАРЫҢЫЗҒА
РАҚМЕТ!

